Las propiedades básicas de una probabilidad son:

1: $P(A) \geq 0 \quad \forall \ A \subset \Omega$

2: $P(\Omega) = 1$

3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para cualquier $A$ y $B$ en $\Omega$ tales que $A \cap B = \emptyset$

A partir de estas 3 inocentes propiedades/axiomas se obtiene toda la teoría de probabilidad.

¿Cómo calcular probabilidades?

1 Asignamos probabilidades a todos los eventos elementales de $\Omega$.
- Los eventos elementales son mutuamente excluyentes
- Su unión es $\Omega$

2: Determinamos $P(A)$ para cualquier $\underline{\underline{A}}$ escribiendo a $A$ como unión de eventos elementales

Ejemplo: experimento lanzamiento de 2 dados - honestos

$|\Omega| = 36 = (6 \times 6)$ - eventos elementales igualmente probables.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Los eventos elementales $E_1, \ldots, E_{36}$

$$P(E_j) = ¿?$$

$$1 = P(\Omega) = \sum_{j=1}^{36} P(E_j) = 36\,P(E_1)$$

$$P(E_j) = 1/36$$

$A = \{$ obtener al menos un 6 $\}$

$$P(A) = 11/36$$

$B = \{$ la suma sea $\geq 8$ $\}$

$$P(B) = 15/36$$

$C = \{$ el número del primer dado es menor que el del segundo $\}$

Ejemplo

De 120 personas que solicitan un trabajo:

80 tienen experiencia laboral
60 tienen estudios
40 tienen experiencia pero no tienen estudios

Si el trabajo se le ofrece a uno de los aplicantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el aplicante

a) Tenga estudios y experiencia?
b) No tenga estudios ni experiencia?

$E_1$ = experiencia laboral
$E_2$ = estudios

$$P(E_1) = \frac{80}{120} = \frac{(\cancel{10})(8)}{(\cancel{10})(12)} = \frac{(\cancel{4})(2)}{(\cancel{4})(3)} = 2/3 = \underline{4/6}$$

$$P(E_2) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{6}}$$

no pueden ser eventos disjuntos

$$P(E_1 \cap E_2^c) = \frac{40}{120} = \frac{\cancel{(10)}(4)}{\cancel{(10)}12} = \frac{(2)(2)}{(2)(6)} = \frac{2}{6}$$

$$E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^c)$$

$$P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2^c)$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2^c)$$

$$= \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0.333\ldots$$

$$P(E_1^c \cap E_2^c) = P((E_1 \cup E_2)^c) = 1 - P(E_1 \cup E_2)$$

$$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right]$$

$$= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \approx 0.166\ldots$$

## Probabilidad condicional

En esta parte veremos uno de los conceptos más importantes en probabilidad. Esta es la pregunta, a medida que obtenemos mas información acerca de un fenomeno aleatorio

¿Cómo actualizamos las probabilidades para cada evento?

Por ejemplo, en una determinada ciudad la probabilidad de que llueva en un día cualquiera es de 23%.

$$P(R) = 0.23 \quad , \quad R = \text{llueva en un día cualquiera}$$

Ahora supongamos que queremos saber si lloverá en un día determinado, pero además sabemos que estará nublado.

¿Cómo usamos esta nueva información para actualizar $P(R)$?

Si $C$ es el evento de que esté nublado, entonces nos gustaría calcular

$P(R|C)$ $\leftarrow$ probabilidad de que llueva dado que sabemos que estará nublado.

Intuitivamente $P(R|C) \geq P(R)$

y $P(R)$ es nuestro conocimiento previo.

Vamos a ver un ejemplo muy sencillo. Lanzamiento de 1 dado honesto

$$\Omega = \{1, 2, 3, \boxed{4, 5, 6}\}$$

$$P(E_j) = 1/6$$

$$A = \{\text{Sale un par}\}$$

$B = \{\text{sea mayor que } 3\} = \{4, 5, 6\},$

$$P(A|B) = \frac{2}{3}$$

Formalmente cómo lo calculamos

Sean A y B dos eventos de $\Omega$, la probabilidad condicional de A dado B se define como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{con } P(B) > 0$$

Intuición

- Sabemos que $\underline{B}$ sucedió $\Rightarrow$ $\Omega$ se reduce a B.
- La única forma en que A sucede es cuando $A \cap B$ sucede
- Como nuestro nuevo espacio muestral es B, tenemos que normalizar

En el ejemplo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{1/2} = \frac{(\cancel{2})(2)}{(\cancel{2})(3)} = \frac{2}{3}$$

Es importante notar que $P(A|B)$ posee las tres propiedades de una probabilidad, i.e.

1) $P(A|B) \geq 0 \quad \forall A$
2) $P(B|B) = 1$
3) $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B)$ para $A \cap C \neq \emptyset$

## Probabilidad total

Aquí lo que se busca es obtener probabilidades de eventos cuando sólo se conocen las probabilidades condicionales

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \end{aligned}$$

y se tiene la generalización obvia

Supongamos que podemos particionar a $\Omega$ en $K$ conjuntos disjuntos $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_K = \bigcup_{j=1}^{K} B_j$

$$\Rightarrow A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_K)$$

pero $P(A \cap B_j) = P(A|B_j)P(B_j)$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)$$

Ejemplo: Una compañía produce focos de 3 diferentes tipos $(T_1, T_2, T_3)$, algunos tienen defectos de fábrica. Por experiencia se sabe que la probabilidad de que los focos del tipo $T_1$ estén defectuosos es $1/10$ y la misma probabilidad para los focos tipo $T_2$ y $T_3$ es de $1/15$ y $2/10$ respectivamente.

Un lote de 200 focos se manda al laboratorio de control de calidad: 100 $T_1$, 75 $T_2$ y 25 de $T_3$.
¿Cuál es la probabilidad de que encuentren un foco defectuoso?

$D = \{\text{foco defectuoso}\}$
$T_j = \{\text{foco del tipo } T_j\}$

$P(D|T_1) = 1/10$, $P(D|T_2) = 1/15$ y $P(D|T_3) = 2/10$

$$P(D) = \sum_{j=1}^{3} P(D|T_j)P(T_j)$$

$$P(T_1) = \frac{1}{2}, \quad P(T_2) = \frac{75}{200} = \frac{(\cancel{5})15}{(\cancel{5})(40)} = \frac{(\cancel{5})(3)}{(\cancel{5})(8)} = \frac{3}{8}$$

$$P(T_3) = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

$$P(D) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{4}{8}\right) + \left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{15} + \frac{2}{10}\right) = \frac{1}{(8)(5)}\left(\frac{4}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{40}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{40}\,\frac{10}{3}$$

$$= \frac{1}{12}$$

## $\boxed{\text{Teorema de Bayes}}$

Si tenemos $P(A|B)$ y $P(B)$, ¿Como podemos obtener $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

Ejemplo: Una cierta enfermedad afecta a 1 de cada 10,000 personas. Existe una prueba para determinar si una persona tiene la enfermedad. En particular se sabe que

- $P(T \mid D^c) = 0.02$
- $P(T^c \mid D) = 0.01$

[parece una prueba muy buena]

$D$ - la persona tiene la enfermedad

$T$ - la prueba sea positiva

Una persona se elige de manera aleatoria, se le hace la prueba y la prueba sale positiva.

¿Cuál es la probabilidad de que esta persona esté enferma?

¿Qué queremos? $\rightarrow$ $\underline{P(D \mid T)}$

y ¿qué sabemos?

$$P(D) = \frac{1}{10{,}000} \quad \text{y} \quad \begin{matrix} P(T \mid D^c) = 0.02 \\ P(T^c \mid D) = 0.01 \end{matrix}$$

$$P(D \mid T) = \frac{P(T \mid D)\,P(D)}{P(T)} \approx 0.0049$$

$$P(T) = P(T \cap D) + P(T \cap D^c)$$
$$= P(T \mid D)P(D) + P(T \mid D^c)P(D^c)$$

## Independencia

En general $P(A \mid B) \neq P(A)$, en este caso el saber que $B$ ha ocurrido impacta la probabilidad de la ocurrencia de $A$. Pero y si

$$P(A \mid B) = P(A) \Rightarrow$$ obviamente saber que $B$ ha ocurrido no nos dice nada acerca de $A$

los eventos $A$ y $B$ son independientes

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{P(A \cap B) = P(B)P(A)}$$

$\Rightarrow$ Dos eventos $A$ y $B$ son independientes

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Importante: $A$ y $B$ son mutuamente excluyentes o disjuntos

$\iff P(A \cap B) = 0$

$\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$A$ y $B$ son independientes $\iff$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Generalización de independencia, los eventos $A_1, A_2, \ldots A_n$ son independientes $\iff$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_j\right) = \prod_{i=1}^{k} P(A_j)$$